

## 新的互正交互补序列集构造

刘凯<sup>1,2</sup>, 孟凡飞<sup>1,2</sup>, 彭佩栋<sup>1,2</sup>

(1.燕山大学信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2.河北省信息传输与信号处理重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 针对互正交互补序列集 (MOCSS) 设计方法的局限性和构造参数的不足, 提出了一种基于仿酉矩阵的 MOCSS 构造方法。该方法引入系数仿酉矩阵的新概念, 并通过结合矩阵乘积、克罗内克积和矩阵迭代技术, 构造了3类不同阶数的仿酉矩阵。利用仿酉矩阵与 MOCSS 之间的等价性, 开发了一系列参数选择灵活的多相 MOCSS, 补充了现有文献设计结果。考虑到多载波码分多址系统峰均功率比 (PAPR) 抑制问题, 进一步利用布尔函数设计了一种具有低列向量 PAPR 特性的系数仿酉矩阵。实验结果表明, 采用这类系数仿酉矩阵构造的 MOCSS, 其序列 PAPR 有效控制在2以内的范围, 同时保持了码容量和长度的灵活性, 为系统提供了多样化的信号选择。

**关键词:** 互正交互补序列集; 系数仿酉矩阵; 仿酉矩阵; 峰均功率比

**中图分类号:** TN911.2

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2024156

## New construction of mutually orthogonal complementary sequence sets

LIU Kai<sup>1,2</sup>, MENG Fanfei<sup>1,2</sup>, PENG Peidong<sup>1,2</sup>

1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China  
2. Hebei Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

**Abstract:** To address the limitations in design methods and the scarcity of construction parameters for mutual orthogonal complementary sequence set (MOCSS), a construction method for MOCSS based on paraunitary (PU) matrices was proposed. The new concept of coefficient paraunitary (CPU) matrices was defined, and by employing matrix multiplication, Kronecker product, and matrix iteration techniques, three types of PU matrices with varying sizes were constructed. Utilizing the equivalence between PU matrices and MOCSS, a series of multi-phase MOCSS with flexible parameter selection were developed, filling the parameter gap in the existing literature. Considering the suppression of peak-to-average power ratio (PAPR) in multi-carrier code division multiple access (MC-CDMA) systems, a class of CPU matrices with low column vector PAPR characteristics was designed using Boolean functions. Experimental results demonstrate that the constructed MOCSS using such CPU matrices effectively controls the column sequence PAPR within the range of below two, while maintaining the flexibility of code capacity and length, providing a variety of signal selection options for the systems.

**Keywords:** mutual orthogonal complementary sequence set, coefficient paraunitary matrix, paraunitary matrix, peak-to-average power ratio

收稿日期: 2024-02-18; 修回日期: 2024-06-28

通信作者: 刘凯, liukai@ysu.edu.cn.

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目 (No.F2023203066); 国家自然科学基金资助项目 (No.62241110); 河北省重点实验室基金资助项目 (No.202250701010046)

**Foundation Items:** The Natural Science Foundation of Hebei Province (No.F2023203066), The National Natural Science Foundation of China (No.62241110), Hebei Key Laboratory Project (No.202250701010046)

## 0 引言

互正交互补序列集 (MOCSS, mutually orthogonal complementary sequence set) 的设计源于 Golay<sup>[1]</sup>在光谱研究中引入的 Golay 互补对 (GCP, Golay complementary pair) 的概念。GCP 由一对序列对组成, 序列的非周期自相关函数之和在任意非 0 时移处都为 0。Tseng 等<sup>[2]</sup>将 GCP 推广到格雷互补序列 (GCS, Golay complementary sequence) 和 MOCSS。GCS 是由长度为  $N$  的  $M$  ( $M \geq 2$ ) 个序列组成的集合, 与 GCP 类似, GCS 各序列的非周期自相关函数之和在非 0 时移处也为 0。MOCSS 由  $K$  个 GCS 组成, 任意 2 个 GCS 相互正交。当集合的码容量达到上界  $K=M$  时, 称 MOCSS 为完全互补码 (CCC, complete complementary code)<sup>[3]</sup>。MOCSS 在无线通信中得到广泛应用, 例如无线信道估计<sup>[4]</sup>、正交频分复用系统的峰均值功率比 (PAPR, peak-to-average power ratio) 控制<sup>[5]</sup>、多载波码分多址系统 (MC-CDMA, multicarrier code division multiple access) 的多用户检测器设计<sup>[6]</sup>、零相关区序列设计<sup>[7]</sup>、信息隐藏<sup>[8]</sup>、雷达通信一体化<sup>[9]</sup>等领域。

在多用户多速率无线通信系统中, 不同长度的码分配给用户以提供多种类型的服务质量, 例如, 采用长序列来支持超可靠的多用户性能; 采用短序列提供高速率传输。因此, 设计不同长度的 MOCSS 以适应不同的应用场景十分必要。目前构造 MOCSS 的直接方法涉及布尔函数的应用, 文献[10-12]利用布尔函数构造了多类 MOCSS, 文献[13-15]利用广义布尔函数构造了 CCC。尽管取得了这些进展, 现有基于布尔函数的方法在序列长度的构造上存在一定的局限性, 它们仅限于 2 或  $q$  的幂次形式, 其中  $q$  表示相位数, 为大于 2 的整数。此外, 对 CCC 应用间接方法也可获得 MOCSS。文献[16]利用 2 个 CCC 作为基序列进行级联操作, 得到了一类 MOCSS; 文献[17]提出了多项式扩展相关运算方法, 以 CCC 作为基序列, 生成了奇数长度的 CCC。近年来, 仿酉 (PU, paraunitary) 矩阵<sup>[18]</sup>应用于互补序列设计领域, 获得较丰富的设计结果。Das 等<sup>[19]</sup>利用 PU 矩阵提出了一类 CCC 发生器, 它不包含乘法器, 而是由多路复用器和只读存储器构成。此外, 他们还揭示了 PU 矩阵和 CCC 之间存在等价关系, 因此设计 PU 矩阵可以获得 CCC。利用迭代运算, 他们进一步扩展了

序列的长度<sup>[20]</sup>, 并设计了多类 PU 矩阵, 进而得到多种长度的 CCC<sup>[21]</sup>。然而, 现有利用 PU 矩阵构造 CCC 的方法存在一定局限性。PU 矩阵的构造需要对多个矩阵进行连续的块运算, 因此 PU 矩阵参数依赖于所采用的核矩阵。在以往研究中, 仅采用了 Butson-type Hadamard (BH) 矩阵<sup>[22]</sup>作为核矩阵, 但 BH 矩阵仅存在方阵形式, 这限制了 MOCSS 参数的选择, 仅在  $K=M$  的情况下成立, 即只能构造出 CCC, 并且在序列长度上也受限, 限制了参数范围。

鉴于以上分析, 本文提出了系数仿酉 (CPU, coefficient paraunitary) 矩阵的概念。将 CPU 矩阵作为核矩阵, 可以构造出灵活维度的 PU 矩阵, 进而得到具有丰富参数的 MOCSS。为了进一步扩展 MOCSS 的长度和码容量, 分别利用迭代法和克罗内克积进一步扩展 MOCSS 参数。此外, 多载波通信系统中存在着信号 PAPR 过大的问题, 会导致系统放大器的非线性失真, 工程上利用编码方法抑制 PAPR 是有效的解决方案之一。针对该问题, 本文依据 CCC-MC-CDMA 系统<sup>[6]</sup>分析了 MOCSS-MC-CDMA 系统的传输原理, 该系统的 PAPR 控制依赖于互补序列的列序列 PAPR 性质。目前, 仅文献[11-12]给出了利用布尔函数构造具有低列序列 PAPR 的 MOCSS 设计, 但是在序列长度和码容量方面都存在较多约束。为了丰富具有低列序列 PAPR 的 MOCSS 设计方法和参数范围, 本文引入具有低列向量 PAPR 的 CPU 矩阵, 构造了一类长度丰富、码容量选择灵活的低列序列 PAPR 的 MOCSS。相较于以往文献, 本文可获得大量新参数的 MOCSS, 序列的长度相对于子序列数量存在长序列和短序列不同类型, 而且具有低列序列 PAPR 的特性, 适合更广泛的应用场景。

## 1 预备知识

**定义 1** 2 个复序列  $\mathbf{x} = (x[0], x[1], \dots, x[L-1])$  和  $\mathbf{y} = (y[0], y[1], \dots, y[L-1])$  的非周期自相关函数为

$$R_{x,y}[\tau] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{L-1-\tau} x[k]y^*[k+\tau], & 0 \leq \tau \leq L-1 \\ \sum_{k=0}^{L-1+\tau} x[k-\tau]y^*[k], & 1-L \leq \tau < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $(\cdot)^*$  代表复共轭。当  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  时,  $R_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\tau]$  被称为非周期互相关函数; 当  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  时,  $R_{\mathbf{x},\mathbf{x}}[\tau]$  被称为序列  $\mathbf{x}$  的非周期自相关函数, 用  $R_{\mathbf{x}}[\tau]$  表示。

**定义 2**<sup>[20]</sup> 序列  $\mathbf{x}$  和序列  $\mathbf{y}$  的  $z$  变换分别表示为  $x(z) = \sum_{k=0}^{L-1} x[k]z^{-k}$  和  $y(z) = \sum_{k=0}^{L-1} y[k]z^{-k}$ ; 共轭  $z$  变换为  $x^*(z) = \sum_{k=0}^{L-1} x^*[k]z^{-k}$  和  $y^*(z) = \sum_{k=0}^{L-1} y^*[k]z^{-k}$ 。

**定义 3**<sup>[20]</sup> 序列  $\mathbf{x}$  和序列  $\mathbf{y}$  的非周期互相关函数  $R_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\tau]$  的  $z$  变换表示为

$$R_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(z) = \sum_{\tau=1-L}^{L-1} R_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\tau]z^{-\tau} = x(z)y^*(z^{-1}) \quad (2)$$

**定义 4**<sup>[20]</sup>  $X = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{M-1}\}$  和  $Y = \{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{M-1}\}$  是 2 个包含  $M$  个  $L$  长序列的序列集, 它们的  $z$  变换表示为列向量  $\mathbf{X}(z) = [x_0(z), \dots, x_{M-1}(z)]^T$  和  $\mathbf{Y}(z) = [y_0(z), \dots, y_{M-1}(z)]^T$ ,  $\mathbf{X}(z)$  和  $\mathbf{Y}(z)$  的非周期互相关函数表示为

$$S_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(z) = \sum_{\tau=1-L}^{L-1} S_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}[\tau]z^{-\tau} = \sum_{m=0}^{M-1} R_{x_m, y_m}(z) \quad (3)$$

其中,  $S_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}[\tau]$  表示序列集  $X$  和  $Y$  的非周期互相关函数, 即

$$S_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}[\tau] = \sum_{m=0}^{M-1} R_{x_m, y_m}[\tau] \quad (4)$$

**定义 5**<sup>[2]</sup> 仿酉矩阵是  $z^{-1}$  上的多项式矩阵, 其中  $|z|=1$ 。  $M \times K$  阶 PU 矩阵  $\mathbf{X}(z)$  被定义为

$$\widetilde{\mathbf{X}(z)}\mathbf{X}(z) = \mathbf{cI}_K \quad (5)$$

其中,  $\widetilde{\mathbf{X}(z)} = \mathbf{X}^H(z^{-1})$ ,  $H$  代表厄密运算,  $\mathbf{I}_K$  是一个大小为  $K \times K$  的单位矩阵。PU 矩阵中  $z^{-k}$  的延迟数  $k$  的最大值被称为 PU 矩阵的度。

**定义 6**<sup>[22]</sup>  $M \times M$  阶复值 Hadamard 矩阵被称为 BH 矩阵, 用  $\mathbf{BH}(M, Q)$  表示, 其元素为单位圆的第  $Q$  次根。 $\mathbf{BH}(M, 2)$  表示  $M=2$  或  $4t$  阶二元 Hadamard 矩阵, 其中  $t \geq 1$ 。

**定义 7** 若一个  $M \times K$  阶单位模复数矩阵  $\mathbf{g}$  满足  $\mathbf{g}^H \mathbf{g} = \mathbf{M}\mathbf{I}_K$ , 则称  $\mathbf{g}$  为系数仿酉矩阵, 记为 CPU 矩阵。

事实上, 当  $K \leq M$  时, 任意  $M \times K$  阶单位模列正交复数矩阵  $\mathbf{g}$  都能满足  $\mathbf{g}^H \mathbf{g} = \mathbf{M}\mathbf{I}_K$ 。BH 矩阵可以看作  $K = M$  时 CPU 矩阵的特例。CPU 矩阵可以通过从 BH 矩阵中选择列向量来构造。本文的 PU 矩阵构造中, CPU 矩阵起到至关重要的作用。

**定义 8**<sup>[20]</sup> 令  $\mathbf{X}(z) = [\mathbf{x}_0(z), \mathbf{x}_1(z), \dots, \mathbf{x}_{K-1}(z)]$  是含有  $K$  个列向量的矩阵, 其中列向量  $\mathbf{x}_u(z)$  表示为

$$\mathbf{x}_u(z) = [x_u^0(z), x_u^1(z), \dots, x_u^{M-1}(z)]^T \quad (6)$$

其中,  $x_u^m(z)$  表示第  $m$  个序列  $\mathbf{x}_u^m$  的  $z$  变换,  $x_u^m(z) = \sum_{k=0}^{L-1} x_u^m[k]z^{-k}$ ,  $0 \leq u < K$ ,  $0 \leq m < M$ ,  $K \leq M$ 。令  $0 \leq u, v < K$ , 如果列向量  $\mathbf{x}_u(z)$  和  $\mathbf{x}_v(z)$  的非周期互相关函数为

$$S_{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v}(z) = \sum_{m=0}^{M-1} R_{x_u^m, x_v^m}(z) = \widetilde{x_v(z)}x_u(z) = c\delta(u-v) \quad (7)$$

其中,  $\delta(\cdot)$  是 delta 函数, 则  $\mathbf{X}(z)$  是一个  $(K, M, L)$ -MOCSS。当  $K=1$  时,  $\mathbf{X}(z)$  退化为一个  $(M, L)$ -GCS。特别地, 当  $K=M$  时,  $\mathbf{X}(z)$  是一个  $(M, M, L)$ -CCC。

**定义 9**<sup>[5]</sup> 设  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$  是长度为  $N$  的复序列, 对于含有  $N$  个子载波的多载波系统, 若载波间隔归一化为 1, 基频为 0, 则时域上的多载波信号可以写为

$$s_b(t) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{2\pi\sqrt{-1}kt}, \quad 0 \leq t < 1 \quad (8)$$

令  $P_b(t) = |s_b(t)|^2$  表示瞬时功率,  $A_b = N$  表示平均功率, 则多相序列  $\mathbf{b}$  在多载波调制下的瞬时平均功率 (IAPR, instantaneous-to-average power ratio) 为

$$\text{IAPR}(\mathbf{b}) = \frac{|s_b(t)|^2}{N} \quad (9)$$

在一个符号周期内, 序列  $\mathbf{b}$  的 PAPR 定义为

$$\text{PAPR}_b = \max_{0 \leq t < 1} \text{IAPR}_b(t) \quad (10)$$

**引理 1**<sup>[5]</sup> 一个包含  $M$  个子序列的 GCS 中, 子序列的 PAPR 上界为  $M$ 。当  $M=2$  时, GCS 转化为 GCP, 其子序列的 PAPR 上界为 2。

**引理 2** 当且仅当  $\mathbf{X}(z)$  是一个  $M \times K$  阶、度为  $L-1$  的 PU 矩阵时,  $\mathbf{X}(z)$  代表一个多相  $(K, M, L)$ -MOCSS。

引理 2 的证明过程易从文献[20]的定理 1 中得出, 此处不再赘述。

**性质 1** 令  $\mathbf{X}$  是一个  $M \times N$  阶 CPU 矩阵,  $\mathbf{Y}(z)$  是一个  $N \times K$  阶 PU 矩阵, 则  $\mathbf{X}\mathbf{Y}(z)$  是一个  $M \times K$  阶 PU 矩阵。

**证明** 因为  $\mathbf{X}$  是一个 CPU 矩阵,  $\mathbf{Y}(z)$  是一个

PU矩阵, 有

$$\widetilde{X}X = c_1 I_N \quad (11)$$

$$\widetilde{Y}(z)Y(z) = c_2 I_K \quad (12)$$

$$\widetilde{XY}(z)XY(z) = \widetilde{Y}(z)\widetilde{X}XY(z) = c_1 c_2 I_K \quad (13)$$

则 $XY(z)$ 是 $M \times K$ 阶PU矩阵。证毕。

**性质2** 令 $X(z)$ 是一个 $M \times N$ 阶PU矩阵,  $Y$ 是一个 $P \times Q$ 阶CPU矩阵, 则 $Y \otimes X(z)$ 是一个 $PM \times QN$ 阶PU矩阵。

**证明** 因为 $X(z)$ 是一个PU矩阵,  $Y$ 是一个CPU矩阵, 故

$$\widetilde{X}(z)X(z) = c_1 I_N \quad (14)$$

$$\widetilde{Y}Y = c_2 I_Q \quad (15)$$

因此有

$$\widetilde{Y \otimes X(z)}Y \otimes X(z) = (\widetilde{Y}Y) \otimes (\widetilde{X}(z)X(z)) = c_1 c_2 I_{QN} \quad (16)$$

则 $Y \otimes X(z)$ 是 $PM \times QN$ 阶的PU矩阵。证毕。

## 2 PU矩阵和MOCSS构造

本节基于CPU矩阵和PU矩阵, 提出3类MOCSS构造方法, 得到不同于以往文献的新参数。

**定理1** 分别取 $M \times m$ 阶和 $m \times p$ 阶CPU矩阵 $U_{M \times m}$ 和 $U_{m \times p}$ , 其中 $m \leq M, p \leq m$ , 令

$$G(z) = U_{M \times m} D_m(z) U_{m \times p} \quad (17)$$

则 $G(z)$ 是一个度为 $m - 1$ 的 $M \times p$ 阶多相PU矩阵, 其中 $D_m(z) = \text{diag}(1, z^{-1}, \dots, z^{-(m-1)})$ 。而且,  $G(z)$ 也是一个 $(p, M, m)$ -MOCSS。

**证明** 因为 $U_{M \times m}$ 和 $U_{m \times p}$ 都为CPU矩阵, 且 $\widetilde{D_m(z)}D_m(z) = I_m$ , 故

$$\widetilde{G(z)}G(z) = MmI_p \quad (18)$$

因此 $G(z)$ 是度为 $m - 1$ 的 $M \times p$ 阶单位模PU矩阵。根据引理2,  $G(z)$ 是一个 $(p, M, m)$ -MOCSS。证毕。

**例1** 取 $4 \times 3$ 阶CPU矩阵 $U_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 \\ 1 & -i & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 和

$3 \times 2$ 阶CPU矩阵 $U_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{-\frac{4\pi i}{3}} \end{bmatrix}$ , 由定理1得

$$G_0(z) = U_{4 \times 3} D_3(z) U_{3 \times 2} =$$

$$\begin{bmatrix} g_0(z), g_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + z^{-1} + z^{-2} & 1 + e^{-\frac{4\pi i}{6}} z^{-1} + e^{-\frac{8\pi i}{6}} z^{-2} \\ 1 + iz^{-1} - z^{-2} & 1 + e^{-\frac{\pi i}{6}} z^{-1} + e^{-\frac{2\pi i}{6}} z^{-2} \\ 1 - iz^{-1} - z^{-2} & 1 + e^{-\frac{7\pi i}{6}} z^{-1} + e^{-\frac{2\pi i}{6}} z^{-2} \\ 1 - z^{-1} + z^{-2} & 1 + e^{-\frac{10\pi i}{6}} z^{-1} + e^{-\frac{8\pi i}{6}} z^{-2} \end{bmatrix}$$

提取列向量 $g_0(z)$ 和 $g_1(z)$ 的系数, 有

$$g_0 = \{(1, 1, 1), (1, i, -1), (1, -i, -1), (1, -1, 1)\}$$

$$g_1 = \left\{ \left( 1, e^{-\frac{4\pi i}{6}}, e^{-\frac{8\pi i}{6}} \right), \left( 1, e^{-\frac{\pi i}{6}}, e^{-\frac{2\pi i}{6}} \right), \left( 1, e^{-\frac{7\pi i}{6}}, e^{-\frac{2\pi i}{6}} \right), \left( 1, e^{-\frac{10\pi i}{6}}, e^{-\frac{8\pi i}{6}} \right) \right\}$$

$g_0$ 和 $g_1$ 的自相关函数为 $S_{g_0}[\tau] = S_{g_1}[\tau] = \{0, 0, 12, 0, 0\}$ , 互相关函数为 $S_{g_0, g_1}[\tau] = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ , 因此 $G_0 = \{g_0, g_1\}$ 是一个 $(2, 4, 3)$ -MOCSS。

**定理2** 令 $U_{X \times M}$ 是 $X \times M$ 阶CPU矩阵,  $U_{X \times X}$ 是 $X \times X$ 阶CPU矩阵, 则

$$G_1(z) = U_{X \times M} D_M(z) G_0(z^M) \quad (19)$$

其中,  $G_0(z) = U_{M \times m} D_m(z) U_{m \times p}$ 由定理1得出。当 $K > 1$ 时

$$G_K(z) = U_{X \times X} D_X(z) G_{K-1}(z^X) \quad (20)$$

其中,  $D_X(z) = \text{diag}(1, z^{-1}, \dots, z^{-(X-1)})$ 。因此 $G_K(z)$ 是一个度为 $MX^{K-1}m - 1$ 的 $X \times p$ 阶PU矩阵, 且 $G_K(z)$ 也是一个 $(p, X, MX^{K-1}m)$ -MOCSS。

**证明** 当 $K = 1$ 时,  $\widetilde{G_1(z)}G_1(z) = XMmI_p$ , 故 $G_1(z)$ 是一个度为 $Mm - 1$ 的 $X \times p$ 阶PU矩阵。当 $K > 1$ 时,  $\widetilde{G_K(z)}G_K(z) = MX^KmI_p$ , 因此 $G_K(z)$ 是一个度为 $MX^{K-1}m - 1$ 的 $X \times p$ 阶PU矩阵。并且, 由引理2可知,  $G_K(z)$ 也是一个 $(p, X, MX^{K-1}m)$ -MOCSS。证毕。

定理2通过矩阵迭代将定理1构造的MOCSS的长度扩大, 实现了序列长度大于互补序列子序列数量, 补充了定理1构造的结果。与文献[20]相比, 定理2可以在扩大序列长度的同时任意增大互补序列子序列数量, 使所得参数变得更加灵活。

**定理3** 取 $Q \times q$ 阶CPU矩阵 $U_{Q \times q}$ ,  $q \leq Q$ , 令

$$\mathbf{G}'(z) = \mathbf{U}_{Q \times q} \otimes \mathbf{G}_K(z) \quad (21)$$

其中,  $\mathbf{G}_K(z)$  为定理 2 得到的 PU 矩阵, 则  $\mathbf{G}'(z)$  是一个度为  $MX^{K-1}m-1$  的  $XQ \times pq$  阶 PU 矩阵, 且  $\mathbf{G}'(z)$  是一个  $(pq, XQ, MX^{K-1}m) - \text{MOCSS}$ .

**证明** 因为  $\mathbf{U}_{Q \times q}$  为 CPU 矩阵, 且  $\mathbf{G}_K(z)$  为 PU 矩阵, 根据性质 2, 可知  $\mathbf{G}'(z) = \mathbf{U}_{Q \times q} \otimes \mathbf{G}_K(z)$  是度为  $MX^{K-1}m-1$  的  $XQ \times pq$  阶 PU 矩阵。由引理 2 可得,  $\mathbf{G}'(z)$  是一个  $(pq, XQ, MX^{K-1}m) - \text{MOCSS}$ 。证毕。

定理 3 在不改变所得 PU 矩阵元素恒模特性的前提下增加了 PU 矩阵的阶数, 即提升了 MOCSS 集合的码容量和互补序列子序列数量。

### 3 具有低的列序列 PAPR 的 MOCSS 构造

本节利用布尔函数给出一类具有低列向量 PAPR 的 CPU 矩阵设计, 根据定理 1 和引理 2, 可进一步获得具有低列序列 PAPR 的 MOCSS。

**引理 3** 令函数式  $a(x) = f(x) + c$ , 其中, 布尔函数  $f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_{\pi(k)} x_{\pi(k+1)} + \sum_{k=1}^n c_k x_k$ ,  $c, c_k \in \mathbb{Z}_2$ ,  $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  的随机排列,  $x = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}) \in \mathbb{Z}_2^n$ 。令  $(c_1, \dots, c_n)_l$  表示  $l$  从 0 遍历至  $2^n - 1$  的二进制组合,  $l = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} c_k$ , 那么由  $a(x)$  可生成  $2^n$  条序列  $\mathbf{a}_l = ((-1)^{a_i}, 0 \leq i < 2^n)$ 。由  $\mathbf{a}_l$  作为列向量构成的矩阵  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{2^n-1}]$  为  $2^n \times 2^n$  阶 CPU 矩阵, 且列向量的 PAPR 不大于 2。

**证明** 设函数式  $b(x) = f(x) + x_{\pi(1)} + c'$ , 其中  $c' \in \mathbb{Z}_2$ , 由文献[5]可知,  $(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l)$  是一对 GCP, 根据引理 1 可知, 序列  $\mathbf{a}_l$  的 PAPR 不大于 2。令  $l_1 \neq l_2$ , 序列  $\mathbf{a}_{l_1}$  与  $\mathbf{a}_{l_2}$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的 2 个列向量, 其中  $l_1 =$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{n-k} c_k, \quad l_2 = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} c'_k, \quad c_k, c'_k \in \mathbb{Z}_2, \quad \text{则} \\ \mathbf{a}_{l_1} \mathbf{a}_{l_2} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{a_i + a'_i} = \\ \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1} x_{\pi(k)} x_{\pi(k+1)} + \sum_{k=1}^n c_k x_k + \sum_{k=1}^{n-1} x_{\pi(k)} x_{\pi(k+1)} + \sum_{k=1}^n c'_k x_k} = \\ \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{\sum_{k=1}^n (c_k + c'_k) x_k} \end{aligned} \quad (22)$$

其中,  $a_i + a'_i$  作模 2 加操作。由于  $l_1 \neq l_2$ , 且  $l_1 = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} c_k, l_2 = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} c'_k$ , 因此不存在  $(c_k + c'_k)$  在所有  $1 \leq k \leq n$  同时为 0 的情况。对于  $0 \leq i \leq 2^n - 1$ ,  $i$  的二进制形式  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  取值具有遍历性, 所以  $\sum_{k=1}^n (c_k + c'_k) i_k$  可分别得到  $2^{n-1}$  个 0 和 1, 则  $\mathbf{a}_{l_1} \mathbf{a}_{l_2} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{\sum_{k=1}^n (c_k + c'_k) i_k} = 0$ , 即列向量  $\mathbf{a}_{l_1}$  与  $\mathbf{a}_{l_2}$  相互正交, 则  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{M} \mathbf{I}_{2^n}$ 。由定义 7 可知,  $\mathbf{A}$  为 CPU 矩阵。证毕。

**例 2** 取  $n = 3, c = 1, \pi$  的排列为 (3,2,1), 则  $a(x) = x_3 x_2 + x_2 x_1 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + 1$ 。  $(c_1, c_2, c_3)$  从 (0,0,0) 遍历到 (1,1,1), 例如, 当  $(c_1, c_2, c_3) = (1,0,1)$  时,  $a(x) = x_3 x_2 + x_2 x_1 + x_1 + x_3 + 1$ , 对应序列为  $\mathbf{a}_5 = (-+---+---)$ , 其中 “+” 和 “-” 分别代表 “+1” 和 “-1”。由此得到  $2^3 = 8$  个序列, 构成矩

$$\text{阵 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ - & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ - & - & - & + & + & + & + & + \\ - & + & - & + & + & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ - & + & + & - & + & - & - & + \end{bmatrix}.$$

**推论 1** 令  $\mathbf{U}_{2^n \times m}$  是由引理 3 的矩阵  $\mathbf{A}$  中任取  $m$  列组成的  $2^n \times m$  阶 CPU 矩阵,  $m \leq 2^n$ , 其各列向量的 PAPR 不大于 2。再取  $m \times p$  阶 CPU 矩阵  $\mathbf{U}_{m \times p}$ , 其中  $p \leq m$ 。令

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{U}_{2^n \times m} \mathbf{D}_m(z) \mathbf{U}_{m \times p} \quad (23)$$

则  $\mathbf{G}(z)$  是一个度为  $m-1$  的  $2^n \times p$  阶 PU 矩阵, 其中  $\mathbf{D}_m(z) = \text{diag}(1, z^{-1}, \dots, z^{-(m-1)})$ 。那么,  $\mathbf{G}(z)$  是一个  $(p, 2^n, m) - \text{MOCSS}$ , 且列序列 PAPR 不大于 2。

**证明**  $\mathbf{G}(z)$  为 MOCSS 的证明过程与定理 1 类似, 此处不再赘述, 下面证明其列序列 PAPR 的性能。

令  $\mathbf{U}_{2^n \times m} = [u_{ij}]_{2^n \times m}$ , 其中  $0 \leq i \leq 2^n - 1, 0 \leq j \leq m - 1$ 。令  $\mathbf{U}_{m \times p} = [v_{lk}]_{m \times p}$ , 其中  $0 \leq l \leq m - 1, 0 \leq k \leq p - 1$ 。由式(23)可得  $\mathbf{G}(z)$  的第  $k$  列向量为

$$\mathbf{g}_k(z) = \begin{bmatrix} u_{0,0}v_{0,k} + u_{0,1}v_{1,k}z^{-1} + \dots + u_{0,m-1}v_{m-1,k}z^{-(m-1)} \\ u_{1,0}v_{0,k} + u_{1,1}v_{1,k}z^{-1} + \dots + u_{1,m-1}v_{m-1,k}z^{-(m-1)} \\ \vdots \\ u_{2^n-1,0}v_{0,k} + u_{2^n-1,1}v_{1,k}z^{-1} + \dots + u_{2^n-1,m-1}v_{m-1,k}z^{-(m-1)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

提取  $\mathbf{g}_k(z)$  的系数矩阵可得

$$\mathbf{g}_k = \begin{bmatrix} u_{0,0}v_{0,k} & u_{0,1}v_{1,k} & \dots & u_{0,m-1}v_{m-1,k} \\ u_{1,0}v_{0,k} & u_{1,1}v_{1,k} & \dots & u_{1,m-1}v_{m-1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2^n-1,0}v_{0,k} & u_{2^n-1,1}v_{1,k} & \dots & u_{2^n-1,m-1}v_{m-1,k} \end{bmatrix} \quad (25)$$

由引理2可知,  $\mathbf{g}_k$  代表 MOCSS 的一个互补序列, 其行向量代表子序列。  $\mathbf{g}_k$  的第  $j$  列表示为  $\mathbf{g}_{kj}$  =  $\mathbf{u}_j \mathbf{v}_{j,k}$ , 其中  $\mathbf{u}_j$  代表  $U_{2^n \times m}$  的第  $j$  个列向量。由于  $U_{2^n \times m}$  各列向量 PAPR 不大于 2, 且  $|v_{j,k}| = 1$ , 因此  $\text{PAPR}_{\mathbf{g}_{kj}} = \text{PAPR}_{\mathbf{u}_j}$ , 故  $\mathbf{G}(z)$  的任意一条列序列 PAPR 都不大于 2。证毕。

推论1将定理1构造的MOCSS的列序列PAPR降低至2以下, 且码容量和长度灵活, 下面举例说明。

**例3** 取列向量 PAPR 不大于 2 的  $8 \times 6$  阶 CPU 矩阵  $U_{8 \times 6}$ , 另取任意  $6 \times 3$  阶 CPU 矩阵  $U_{6 \times 3}$ , 其中元素均以  $\omega = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{3}}$  的指数幂表示。

$$U_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & + & - & + & - & + \\ - & - & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & - \\ - & - & - & - & + & + \\ - & + & - & - & + & - \\ + & + & - & - & - & - \\ - & + & - & - & + & - \end{bmatrix}, U_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 000 \\ 012 \\ 024 \\ 030 \\ 042 \\ 054 \end{bmatrix}$$

根据推论1,  $\mathbf{G}(z) = U_{8 \times 6} \mathbf{D}_6(z) U_{6 \times 3}$ , 可以得到一个度为5的  $8 \times 3$  阶 6-PSK PU 矩阵。根据引理2可得,  $\mathbf{G}(z)$  代表一个 (3,8,6) -MOCSS, 其互补码的详细结果以矩阵形式列于表1。

基于文献[6]的 CCC-MC-CDMA 系统框架, 本文衍生出 MOCSS-MC-CDMA 收发系统原理模型, 如图1所示。将第  $k$  个用户的信息复制到  $M$  个载波通道, 将 MOCSS 的  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_{K-1}\}$  中的互补码  $g_k$  用矩阵形式  $\mathbf{g}_k$  表示, 利用各行向量  $\mathbf{g}_{k,i}$  对用户信息进行扩频处理。在每个单位码片时间内, 通过

快速傅里叶逆变换 (IFFT) 对  $M$  个载波信号进行处理, 实质是对携带用户信息的互补矩阵的列向量实施多载波调制。以此系统框架进行仿真实验, 检测构造的 MOCSS 序列的 PAPR 特性。

表1 低列序列PAPR的(3,8,6) -MOCSS

$\mathbf{g}_k$	互补码矩阵
$\mathbf{g}_0$	$\begin{bmatrix} 33303303 \\ 30333000 \\ 33033330 \\ 30003033 \\ 33300030 \\ 30330333 \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{g}_1$	$\begin{bmatrix} 33303303 \\ 41444111 \\ 55255552 \\ 03330300 \\ 11144414 \\ 25425222 \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{g}_2$	$\begin{bmatrix} 33303303 \\ 52555222 \\ 11411114 \\ 30003033 \\ 55522252 \\ 14114111 \end{bmatrix}^T$

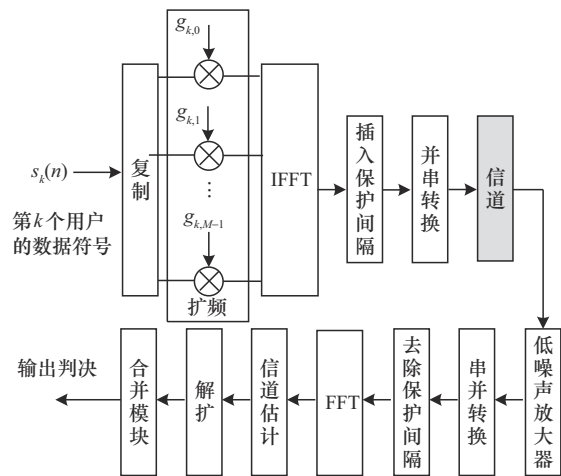


图1 MOCSS-MC-CDMA 收发系统原理模型

首先, 以例3的(3,8,6) -MOCSS 作为扩频矩阵。令系统用户数为3, 则图1中  $0 \leq k \leq 2$ , 将  $\mathbf{g}_0$ 、 $\mathbf{g}_1$  和  $\mathbf{g}_2$  分配给各用户, 载波数为8, 循环前缀长度为3, 多径数量为2, 传输信噪比为 10 dB。用户数据经 MOCSS 的互补码扩频、多载波调制、添加循环前缀后转换为串行信号发送, 经信道传输到达接收端的前置放大器。本文计算了3组接收信号的 IAPR 分布曲线, 如图2所示。接收信号分别取自

经表 1 中  $g_0$  的第 1 列序列  $g_{0,0}$ 、 $g_1$  的第 2 列序列  $g_{1,1}$  和  $g_2$  的第 3 列序列  $g_{2,2}$  扩频的传输信号。由图 2 可知，3 条 IAPR 曲线最大值均为 2，根据定义 9 可知，MOCSS 的列序列 PAPR 不大于 2。

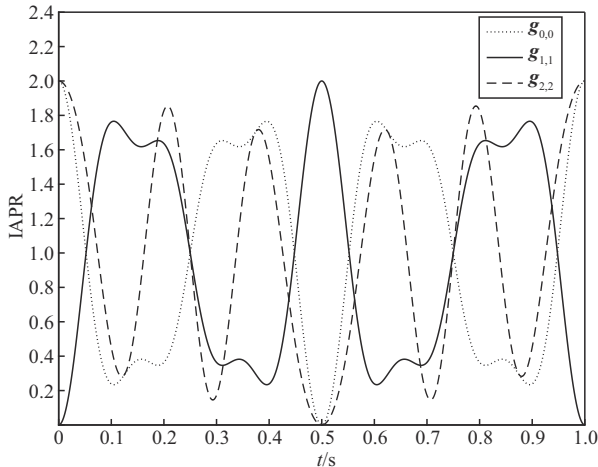


图 2 (3,8,6) - MOCSS 列向量 IAPR

其次，对比相同参数下本文和文献[10]的 MOCSS 列序列 IAPR 分布曲线。以文献[10]中例 2 的 (2,8,40) - MOCSS 的  $C = \{c_1, c_2\}$  为参考，构建同参数 MOCSS。

令具有低列向量 PAPR 的 CPU 矩阵为

$$U_{8 \times 5} = \begin{bmatrix} - - - - - \\ - + - + - \\ - - + + - \\ + - - + + \\ - - - - + \\ - + - + + \\ + + - - - \\ - + + - + \end{bmatrix}, \text{ 再取 } U_{5 \times 2} = \begin{bmatrix} 00 \\ 02 \\ 04 \\ 06 \\ 08 \end{bmatrix} \text{ 为 } 5 \times 2 \text{ 阶 CPU}$$

矩阵，其元素以  $\omega = e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}}$  的指数幂表示。根据推论 1 有  $G_0(z) = U_{8 \times 5} D_5(z) U_{5 \times 2}$ ，得到  $G_0 = \{g_0^0, g_1^0\}$  为 (2,8,5) - MOCSS，其中  $g_0^0$  和  $g_1^0$  代表 2 个互补码。利用定理 2 进行矩阵迭代操作，即  $G_1(z) = U_{8 \times 8} D_8(z) G_0(z)$ ，可得  $G_1 = \{g_0^1, g_1^1\}$  为

(2,8,40) - MOCSS，其中  $U_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} + + + + + + + + \\ + - + - + - + - \\ + + - - + + - - \\ + - - + + - - + \\ + + + - - - - + \\ + - + - - + - + \\ + + - - - + + + \\ + - - + - + - + \end{bmatrix}$ 。

分别取互补码  $g_0^1$  第 1 列序列  $g_{0,0}^1 = (- - - + - - - + -)$  和文献[10]中互补码  $c_1$  的第 2 列序列进行 IAPR 比较，如图 3 所示。

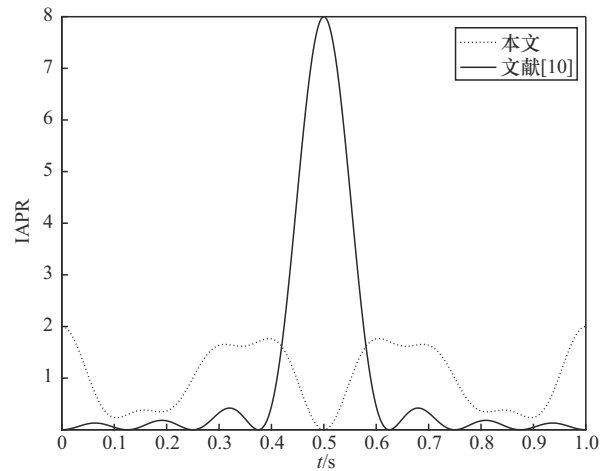


图 3 本文和文献[10]的(2,8,40) - MOCSS 列序列 IAPR 比较

由图 3 可知，本文 MOCSS 的列序列 IAPR 最大值为 2，而文献[10]的列序列 IAPR 最大值高达 8。可见，本文构造的 MOCSS 具有更低的 PAPR 值，更适合于 MOCSS-MC-CDMA 系统放大器的工作范围。

### 4 参数对比

本节将本文构造的 MOCSS 参数与现有文献中的参数进行对比，如表 2 所示。文献[10-12]采用布尔函数构造得到的 MOCSS 参数受 2 或  $q$  的幂次限制。尽管文献[11-12]成功构造了低列序列 PAPR 的 MOCSS，但在序列长度方面，本文构造结果更加丰富。例如，当互补码子序列数量为 16 时，推论 1 可以产生长度范围为 2~16 的 MOCSS。特别是，长度为 7、11、13、14、15 的 MOCSS 是文献[11-12]无法生成的。

文献[16]采用级联法将 2 个 CCC 合并为一个 MOCSS，集合码容量是互补序列子序列数量的一半，序列长度为 2 个 CCC 序列长度之和，因此所得 MOCSS 参数依赖于所选择的 CCC 参数，且列序列 PAPR 性能无法保证。

本文引入 CPU 矩阵，通过选取灵活阶数的 CPU 矩阵得到阶数和度更加丰富的 PU 矩阵，由此获得的 MOCSS 参数突破了已有设计的参数形式，例如，(5,8,7) - MOCSS、(11,16,13) - MOCSS 等参

表 2 MOCSS 构造参数对比

文献	方法	MOCSS 参数	限制条件	列 PAPR
文献[10]	布尔函数	$(2^{k'}, 2^{k'+1}, 2^m + 2^t)$	$0 < k, t \leq m - 1, 0 \leq k' \leq t, k' \leq k - 1$	$2^{k'+1}$
文献[10]	布尔函数	$(2^k, 2^{k+1}, 2^m + 2^t)$	$0 \leq t < k \leq m$	$2^{k+1}$
文献[11]	布尔函数	$(2^k, 2^{k+1}, 2^m + 2^t)$	$0 \leq t < k \leq m$	2
文献[12]	布尔函数	$(2^k, 2^{k+1}, 2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-4})$	$m \geq 6, 0 \leq k \leq m - 6$	2
文献[12]	布尔函数	$(2^k, 2^{k+1}, 2^{m-1} + 2^{m-3})$	$m \geq 5, 0 \leq k \leq m - 5$	2
文献[16]	级联法	$(M, 2M, L_1 + L_2)$	$M, L_1$ 和 $L_2$ 取决于基础 CCC 参数	$2M$
本文定理 1	CPU 矩阵	$(p, M, m)$	$p \leq m \leq M, M \geq 2$	$M$
本文定理 2	CPU 矩阵 PU 矩阵	$(p, X, MX^{K-1}m)$	$p \leq m \leq M, 2 \leq M \leq X, K \geq 1$	$X$
本文定理 3	CPU 矩阵 PU 矩阵	$(pq, XQ, MX^{K-1}m)$	$p \leq m \leq M, 2 \leq M \leq X, 2 \leq q \leq Q, K \geq 1$	$XQ$
本文推论 1	CPU 矩阵 PU 矩阵	$(p, 2^n, m)$	$p \leq m \leq 2^n, n \geq 1$	2

数无法从以往文献中获得，而且它们都具有低列序列 PAPR 特性。

### 5 结束语

本文定义了 CPU 矩阵，并结合矩阵乘积、克罗内克积、矩阵迭代的方法生成了参数灵活的 PU 矩阵。根据 PU 矩阵与 MOCSS 的等价关系，可以获得以往文献中不能获得的多相 MOCSS 参数。以往文献得到的多相 MOCSS 长度大于互补序列子序列数量，而本文可获得小于子序列数量的任意长度的 MOCSS，而且通过长度扩展可以产生更多长度类型的 MOCSS。此外，通过引入一类具有低列向量 PAPR 特征的 CPU 矩阵，得到了码容量和长度灵活且列序列 PAPR 不大于 2 的 MOCSS，为 MC-CDMA 系统提供了丰富的信号选择。本文设计的参数补充了现有文献设计结果，提出的联合 CPU 设计 PU 矩阵的方法可以推广至 Z 仿西<sup>[23]</sup>矩阵设计，获得参数更丰富的零相关区互补序列集。

### 参考文献:

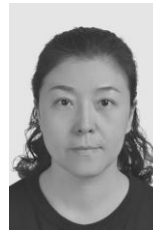
[1] GOLAY M J. Static multislit spectrometry and its application to the panoramic display of infrared spectra[J]. Journal of the Optical Society of America, 1951, 41(7): 468-472.  
 [2] TSENG C C, LIU C. Complementary sets of sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1972, 18(5): 644-652.  
 [3] SUEHIRO N, HATORI M. N-shift cross-orthogonal sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1988, 34(1): 143-146.  
 [4] WANG S Q, ABDI A. MIMO ISI channel estimation using uncorrelated golay complementary sets of polyphase sequences[J]. IEEE Transac-

tions on Vehicular Technology, 2007, 56(5): 3024-3039.  
 [5] PATERSON K G. Generalized Reed-Muller codes and power control in OFDM modulation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(1): 104-120.  
 [6] LIU Z L, GUAN Y L, CHEN H H. Fractional-delay-resilient receiver design for interference-free MC-CDMA communications based on complete complementary codes[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(3): 1226-1236.  
 [7] 李玉博, 刘涛, 陈晓玉. 几乎最优二元多子集零相关区序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(3): 705-712.  
 LI Y B, LIU T, CHEN X Y. Construction of almost optimal binary multiple zero correlation zone sequence sets[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(3): 705-712.  
 [8] 汤仁义, 张永福, 苏锦海. 基于互补矩阵数据隐藏算法研究[J]. 通信学报, 2007, 28(11): 38-43.  
 TANG R Y, ZHANG Y F, SU J H. Complementary matrix-based algorithm for data hiding[J]. Journal on Communications, 2007, 28(11): 38-43.  
 [9] 李玉博, 崔健, 冯俊超, 等. 基于串行时分 CC-CDMA 的雷达通信一体化[J]. 通信学报, 2023, 44(9): 127-138.  
 LI Y B, CUI J, FENG J C, et al. Dual functional radar communication based on serial time division CC-CDMA[J]. Journal on Communications, 2023, 44(9): 127-138.  
 [10] WU S W, CHEN C Y, LIU Z L. How to construct mutually orthogonal complementary sets with non-power-of-two lengths?[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2021, 67(6): 3464-3472.  
 [11] TIAN L Y, LU X S, XU C Q, et al. New mutually orthogonal complementary sets with non-power-of-two lengths[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2021, 28: 359-363.  
 [12] KUMAR P, MAJHI S, PAUL S. A direct construction of golay complementary pairs and binary complete complementary codes of length non-power of two[J]. IEEE Transactions on Communications, 2023, 71(3): 1352-1363.  
 [13] LIU Z L, GUAN Y L, PARAMPALLI U. New complete complementary codes for peak-to-mean power control in multi-carrier CDMA[J].

- IEEE Transactions on Communications, 2014, 62(3): 1105-1113.
- [14] CHEN C Y, WANG C H, CHAO C C. Complete complementary codes and generalized reed-muller codes[J]. IEEE Communications Letters, 2008, 12(11): 849-851.
- [15] RATHINAKUMAR A, CHATURVEDI A K. Complete mutually orthogonal golay complementary sets from reed-muller codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(3): 1339-1346.
- [16] SHEN B S, MENG H, YANG Y, et al. New constructions of Z-complementary code sets and mutually orthogonal complementary sequence sets[J]. Designs, Codes and Cryptography, 2023, 91(2): 353-371.
- [17] LIU K, LIU J W, NI J. Generalized construction of Z-complementary code sets of odd length[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2023, 30: 354-358.
- [18] VAIDYANATHANM P P. Multi-rate system filter bank[M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1993.
- [19] DAS S, BUDIŠIN S, MAJHI S, et al. A multiplier-free generator for polyphase complete complementary codes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(5): 1184-1196.
- [20] DAS S, MAJHI S, LIU Z L. A novel class of complete complementary codes and their applications for APU matrices[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2018, 25(9): 1300-1304.
- [21] DAS S, MAJHI S, BUDIŠIN S, et al. A new construction framework for polyphase complete complementary codes with various lengths[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(10): 2639-2648.
- [22] BUTSON A T. Generalized hadamard matrices[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1962, 13(6): 894-898.
- [23] DASS, PARAMPALLIU, MAJHIS, et al. New optimal Z-complementary

code sets based on generalized paraunitary matrices[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 5546-5558.

#### [作者简介]



刘凯 (1977-), 女, 黑龙江齐齐哈尔人, 博士, 燕山大学教授、硕士生导师, 主要研究方向为无线通信编码理论。



孟凡飞 (2000-), 男, 山东潍坊人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为序列设计与编码理论。



彭佩栋 (1998-), 男, 河南安阳人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为序列设计与编码理论。